

Implementasi Integral Garis pada Medan Vektor dalam Perhitungan Usaha Gaya

Alpha Reynaldi Pernanda Tanjung^{1,*}, Desta Asina Nainggolan², Dewi Efarina Simanjuntak³, Ian Pedrosa Manatap Lumban Gaol⁴, Rawiyah⁵, Alvi Sahrin Nasution⁶, Hamidah Nasution⁷

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia¹⁻⁷

*Email Korespondensi: alditanjung2310@gmail.com

Sejarah Artikel:

Diterima 10-04-2026
Disetujui 16-04-2026
Diterbitkan 18-04-2026

ABSTRACT

Line integrals are one of the fundamental concepts in advanced calculus used to determine the accumulation of a quantity along a specific path within a vector field. This concept has various applications in science, particularly in physics and engineering, especially in calculating the work done by a force acting on an object moving along a certain trajectory. This study aims to examine the application of line integrals in vector fields for calculating the work of a force and to analyze the relationship between a particle's path and the resulting work. The research method employed is a qualitative approach with mathematical analytical study through theoretical review and calculation of line integrals in two-dimensional vector fields. The analysis process involves defining the vector field function representing the force, parameterizing the particle's path, and evaluating the line integral to obtain the resulting work. The results show that the work done by a force can be determined through the evaluation of a line integral along the path taken by the particle. Furthermore, the analysis of the vector field indicates that the field is conservative, meaning that the work depends only on the initial and final points of the displacement, not on the shape of the path taken. The visualization of the vector field, particle trajectory graphs, and calculation tables helps provide a clearer understanding of the application of line integrals in analyzing work. Therefore, the concept of line integrals in vector fields can be used as an effective mathematical approach to explain the relationship between force and displacement in a physical system.

Keywords: line integral, vector field, work of force, particle trajectory, advanced calculus

ABSTRAK

Integral garis merupakan salah satu konsep utama dalam kalkulus lanjut yang digunakan untuk menentukan akumulasi suatu besaran sepanjang lintasan tertentu pada suatu medan vektor. Konsep ini memiliki berbagai penerapan dalam bidang ilmu pengetahuan, khususnya dalam fisika dan teknik, terutama dalam menghitung usaha yang dilakukan oleh suatu gaya terhadap benda yang bergerak mengikuti lintasan tertentu. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji penerapan integral garis pada medan vektor dalam proses perhitungan usaha gaya serta menganalisis hubungan antara lintasan partikel dengan besarnya usaha yang dihasilkan. Metode penelitian yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan studi analitis matematis melalui kajian teori dan perhitungan integral garis pada medan vektor dua dimensi. Proses analisis dilakukan dengan menentukan fungsi medan vektor yang merepresentasikan gaya, melakukan

parameterisasi lintasan partikel, serta mengevaluasi integral garis untuk memperoleh nilai usaha yang dihasilkan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai usaha gaya dapat ditentukan melalui evaluasi integral garis sepanjang lintasan yang dilalui partikel. Selain itu, hasil analisis terhadap sifat medan vektor menunjukkan bahwa medan yang digunakan merupakan medan konservatif, sehingga besarnya usaha hanya dipengaruhi oleh titik awal dan titik akhir perpindahan, bukan oleh bentuk lintasan yang ditempuh partikel. Penyajian visualisasi medan vektor, grafik lintasan partikel, serta tabel hasil perhitungan membantu memberikan pemahaman yang lebih jelas mengenai penerapan integral garis dalam analisis usaha gaya. Oleh karena itu, konsep integral garis dalam medan vektor dapat dimanfaatkan sebagai pendekatan matematis yang efektif untuk menjelaskan hubungan antara gaya dan perpindahan dalam suatu sistem fisika.

Katakunci: integral garis, medan vektor, usaha gaya, lintasan partikel, kalkulus lanjut.

Bagaimana Cara Sitasi Artikel ini:

Pernanda Tanjung, A. R., Nainggolan, D. A., Simanjuntak, D. E., Lumban Gaol, I. P. M., Rawiyah, R., Nasution, A. S., & Nasution, H. (2026). Implementasi Integral Garis pada Medan Vektor dalam Perhitungan Usaha Gaya. *Jejak Digital: Jurnal Ilmiah Multidisiplin*, 2(3), 3914-3923. <https://doi.org/10.63822/rym5yy09>

PENDAHULUAN

Kalkulus lanjut merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari analisis fungsi dengan lebih dari satu variabel. Kajian ini mencakup berbagai konsep penting seperti turunan parsial, integral lipat, serta analisis medan vektor. Konsep-konsep tersebut memiliki peranan yang sangat penting dalam berbagai bidang ilmu, seperti fisika, teknik, dan ilmu komputer, karena dapat digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena alam secara matematis dan sistematis (Stewart, 2016; Kreyszig, 2011). Salah satu topik yang menjadi bagian penting dalam kalkulus lanjut adalah integral garis, yaitu suatu metode yang digunakan untuk menghitung akumulasi suatu besaran sepanjang lintasan tertentu di dalam suatu medan vektor (Thomas, Weir, & Hass, 2014).

Medan vektor merupakan fungsi yang memetakan setiap titik dalam suatu ruang ke sebuah vektor yang memiliki besar dan arah tertentu. Dalam berbagai fenomena fisika, konsep medan vektor digunakan untuk menggambarkan gaya yang bekerja pada suatu benda, misalnya medan gravitasi, medan listrik, dan medan magnet (Marsden & Tromba, 2012; Schey, 2005). Melalui representasi matematis ini, hubungan antara gaya dan gerak partikel dalam ruang dapat dianalisis secara lebih terstruktur dan sistematis.

Salah satu penerapan penting dari medan vektor adalah dalam perhitungan usaha yang dilakukan oleh suatu gaya terhadap benda yang bergerak sepanjang lintasan tertentu. Dalam mekanika klasik, usaha didefinisikan sebagai hasil integral dari gaya terhadap perpindahan benda. Apabila gaya dinyatakan sebagai fungsi posisi, maka perhitungan usaha harus dilakukan menggunakan integral garis yang mengikuti lintasan gerak partikel tersebut (Thomas et al., 2014; Colley, 2018).

Integral garis memberikan pendekatan matematis untuk menjumlahkan kontribusi gaya pada setiap elemen kecil perpindahan sepanjang lintasan yang dilalui oleh partikel. Konsep ini menjadi sangat penting dalam menganalisis sistem yang gaya-gayanya berubah terhadap posisi. Selain itu, integral garis juga berkaitan dengan konsep medan konservatif yang memiliki fungsi potensial, sehingga usaha yang dihasilkan hanya bergantung pada titik awal dan titik akhir lintasan (Kaplan, 2003; Colley, 2018).

Dalam konteks matematika terapan, konsep integral garis memiliki berbagai aplikasi penting. Dalam bidang teknik, integral garis digunakan untuk menghitung kerja yang dilakukan oleh gaya dalam suatu sistem mekanik. Sementara itu, dalam kajian elektromagnetisme, konsep ini dimanfaatkan untuk menganalisis medan listrik dan medan magnet sepanjang lintasan tertentu (Arfken, Weber, & Harris, 2013; Boas, 2006). Oleh karena itu, pemahaman mengenai integral garis tidak hanya penting dalam kajian matematika, tetapi juga memiliki relevansi yang luas dalam berbagai disiplin ilmu lainnya.

Meskipun demikian, dalam proses pembelajaran kalkulus lanjut, konsep integral garis sering kali dianggap cukup kompleks oleh mahasiswa. Hal ini disebabkan karena konsep tersebut melibatkan representasi matematis yang relatif abstrak serta memerlukan pemahaman mengenai parameterisasi lintasan dan operasi pada vektor (Stewart, 2016; Kreyszig, 2011). Oleh sebab itu, diperlukan pendekatan pembelajaran yang menekankan pada penerapan konsep secara langsung dalam permasalahan nyata agar mahasiswa dapat memahami hubungan antara konsep matematika dengan fenomena fisika secara lebih baik.

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis penerapan integral garis pada medan vektor dalam perhitungan usaha suatu gaya serta mengkaji hubungan antara lintasan partikel dengan nilai usaha yang dihasilkan. Dengan pendekatan tersebut diharapkan pemahaman terhadap konsep integral garis dalam kalkulus lanjut dapat menjadi lebih aplikatif dan mudah dipahami.

METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan metode studi analitis matematis. Pendekatan ini dilakukan dengan menganalisis konsep integral garis pada medan vektor serta penerapannya dalam perhitungan usaha gaya pada suatu partikel yang bergerak pada lintasan tertentu. Analisis dilakukan melalui kajian teori kalkulus lanjut dan penerapan model matematis pada kasus perhitungan usaha gaya. Penelitian analitis matematis digunakan karena fokus utama penelitian ini adalah memahami hubungan antara konsep integral garis, medan vektor, serta perhitungan usaha gaya melalui pendekatan matematis yang sistematis.

Objek Penelitian

Objek penelitian dalam kajian ini adalah penerapan integral garis pada medan vektor dalam perhitungan usaha gaya.

Secara khusus objek yang dianalisis meliputi:

- Medan vektor dua dimensi yang merepresentasikan gaya pada suatu partikel.
- Lintasan partikel dalam bidang dua dimensi yang dinyatakan dalam bentuk parameterisasi.
- Perhitungan usaha gaya menggunakan integral garis sepanjang lintasan partikel.

Dalam penelitian ini digunakan contoh medan vektor:

$$F(x, y) = (2x + y)i + (x + 3y)j$$

Medan vektor tersebut digunakan untuk menghitung usaha gaya pada partikel yang bergerak dari titik awal menuju titik akhir melalui lintasan tertentu.

Sumber Data

Sumber data dalam penelitian ini berasal dari:

- Literatur ilmiah, seperti buku kalkulus lanjut dan analisis vektor yang membahas konsep medan vektor dan integral garis.
- Referensi jurnal dan buku matematika terapan yang berkaitan dengan penerapan integral garis dalam fisika dan mekanika.
- Data hasil perhitungan matematis, yaitu nilai-nilai yang diperoleh dari proses evaluasi integral garis pada medan vektor sepanjang lintasan tertentu.
- Data yang digunakan bersifat teoritis dan diperoleh melalui proses perhitungan matematis berdasarkan konsep-konsep kalkulus lanjut.

Teknik Pengumpulan Data

Studi Pustaka

Studi pustaka dilakukan dengan mengkaji berbagai sumber literatur yang berkaitan dengan konsep integral garis, medan vektor, serta perhitungan usaha gaya dalam kalkulus lanjut. Literatur yang digunakan meliputi buku matematika, buku kalkulus lanjut, dan jurnal ilmiah yang relevan dengan topik penelitian.

Perhitungan Matematis

Pengumpulan data juga dilakukan melalui proses perhitungan matematis menggunakan konsep integral garis pada medan vektor. Usaha yang dilakukan oleh suatu gaya terhadap partikel yang bergerak sepanjang lintasan tertentu dinyatakan dengan rumus:

$$W = \int_C F \cdot dr$$

dengan:

- W = usaha yang dilakukan oleh gaya
- F = medan gaya dalam bentuk medan vektor
- C = lintasan partikel
- dr = elemen perpindahan

Jika medan vektor dinyatakan sebagai

$$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$$

maka integral garis dapat dituliskan sebagai:

$$W = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Untuk mempermudah perhitungan, lintasan partikel dinyatakan dalam bentuk parameterisasi:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

dengan parameter t berada pada interval tertentu.

Elemen perpindahan pada lintasan tersebut dinyatakan sebagai:

$$dx = \frac{dx}{dt} dt$$

$$dy = \frac{dy}{dt} dt$$

Sehingga persamaan integral garis dapat dituliskan sebagai:

$$W = \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt$$

Melalui persamaan tersebut diperoleh data berupa nilai komponen medan gaya, elemen perpindahan, serta hasil perkalian antara keduanya.

Teknik Analisis Data

Teknik analisis data dalam penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahapan sebagai berikut:

- Menentukan fungsi medan vektor yang merepresentasikan gaya.
- Menentukan lintasan partikel dalam bentuk parameterisasi fungsi.
- Menghitung elemen perpindahan pada lintasan tersebut.
- Menghitung hasil perkalian titik antara medan gaya dan elemen perpindahan.
- Mengevaluasi integral garis untuk memperoleh nilai usaha yang dilakukan oleh gaya.

Hasil analisis kemudian disajikan dalam bentuk tabel data perhitungan, grafik lintasan partikel, serta visualisasi medan vektor untuk memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai penerapan integral garis dalam perhitungan usaha gaya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Deskripsi Kasus Penerapan

Untuk mengkaji penerapan integral garis pada medan vektor, dilakukan analisis terhadap suatu partikel yang bergerak pada bidang dua dimensi di bawah pengaruh medan gaya tertentu. Dalam penelitian ini digunakan medan gaya yang dinyatakan sebagai medan vektor:

$$F(x, y) = (2x + y)i + (x + 3y)j$$

Medan ini menggambarkan gaya yang besarnya bergantung pada posisi partikel dalam bidang. Partikel bergerak dari titik awal $A(0,0)$ menuju titik akhir $B(0,0)$.

Usaha yang dilakukan oleh medan gaya terhadap partikel dihitung menggunakan konsep Integral garis:

$$W = \int_C F \cdot dr$$

dengan:

- F adalah medan gaya
- C adalah lintasan partikel
- dr adalah elemen perpindahan

Untuk memberikan pemahaman yang lebih komprehensif, analisis dilakukan pada dua jenis lintasan, yaitu lintasan garis lurus dan lintasan kurva. Hal ini bertujuan untuk menunjukkan bagaimana lintasan mempengaruhi perhitungan usaha pada medan vektor.

Penerapan Pad Lintasan Garis Lurus

Lintasan pertama yang dianalisis adalah lintasan garis lurus dari titik $A(0,0)$ menuju $B(0,0)$. Parameterisasi lintasan dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}x &= 2t \\y &= t\end{aligned}$$

Dengan:

$$0 \leq t \leq 1$$

Elemen perpindahan:

$$\begin{aligned}dx &= 2dt \\dy &= dt\end{aligned}$$

Sehingga :

$$dr = (2,1)dt$$

Substitusi ke dalam medan gaya menghasilkan

$$\begin{aligned}F(x, y) &= (2x + y, x + 3y) \\F(t) &= (5t, 5t)\end{aligned}$$

Perkalian titik:

$$\begin{aligned}F \cdot dr &= (5t, 5t) \cdot (2,1) \\&= 15t\end{aligned}$$

Sehingga integral garisnya:

$$\begin{aligned}W &= \int_0^1 15t dt \\W &= 7.5\end{aligned}$$

Dengan demikian usaha yang dilakukan oleh medan gaya sepanjang lintasan garis lurus adalah 7,5 satuan energi.

Tabel Data Hasil Perhitungan

Untuk memperjelas proses perhitungan, dilakukan evaluasi nilai medan gaya pada beberapa titik lintasan. Tabel berikut menunjukkan nilai parameter, posisi partikel, serta komponen medan gaya.

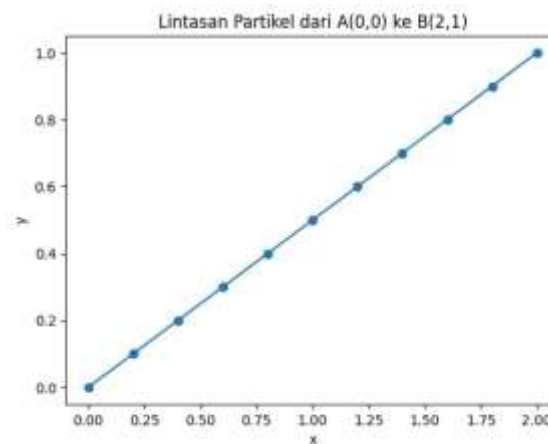
Tabel 1. Tabel Data Hasil Perhitungan

t	$x(t)$	$y(t)$	F_x	F_y	$F \cdot dr$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.2	0.1	0.5	0.5	1.5
0.2	0.4	0.2	1.0	1.0	3.0
0.3	0.6	0.3	1.5	1.5	4.5
0.4	0.8	0.4	2.0	2.0	6.0
0.5	1.0	0.5	2.5	2.5	7.5
0.6	1.2	0.6	3.0	3.0	9.0
0.7	1.4	0.7	3.5	3.5	10.5
0.8	1.6	0.8	4.0	4.0	12.0
0.9	1.8	0.9	4.5	4.5	13.5
1.0	2.0	1.0	5.0	5.0	15.0

Tabel ini menunjukkan bahwa nilai medan gaya meningkat seiring bertambahnya posisi partikel. Hal ini menunjukkan bahwa medan gaya bergantung secara langsung terhadap koordinat posisi.

Grafik Lintasan Partikel

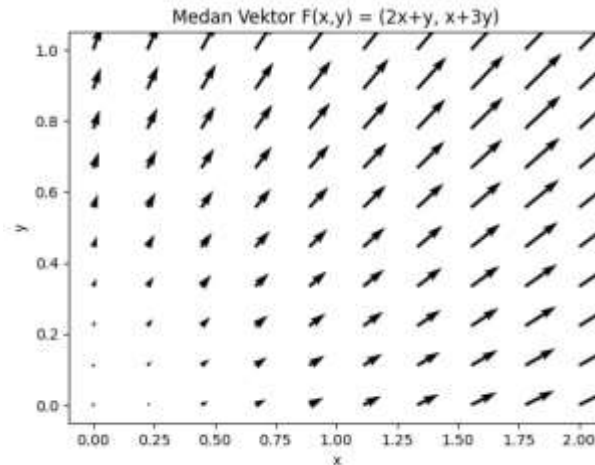
Lintasan partikel pada kasus pertama berbentuk garis lurus dari titik awal menuju titik akhir. Grafik lintasan menunjukkan hubungan antara koordinat X dan Y sepanjang parameter t .



Gambar 1. Grafik Lintasa Partikel

Grafik ini menggambarkan bahwa partikel bergerak secara linear dengan arah yang tetap. Lintasan yang sederhana ini dipilih untuk mempermudah proses analisis awal dari integral garis.

Visualisasi Medan Vektor



Gambar 2 Visualisasi Medan Vektor

Medan vektor $F(x, y)$ dapat divisualisasikan dalam bentuk panah yang menunjukkan arah dan besar gaya pada setiap titik dalam bidang. Pada daerah yang lebih jauh dari titik asal, besar vektor semakin meningkat. Hal ini menunjukkan bahwa gaya yang bekerja pada partikel akan semakin besar ketika posisi partikel semakin jauh dari titik asal. Visualisasi medan vektor sangat membantu dalam memahami bagaimana gaya bekerja sepanjang lintasan partikel.

Penerapan pada Lintasan Kurva

Untuk memberikan analisis yang lebih luas, dilakukan perhitungan usaha pada lintasan kedua berupa kurva.

Lintasan ini didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}x &= 2t \\y &= t^2\end{aligned}$$

Dengan

$$0 \leq t \leq 1$$

Elemen perpindahan:

$$\begin{aligned}dx &= 2dt \\dy &= 2tdt\end{aligned}$$

Sehingga

$$dr = (2, 2t)dt$$

Substitusi ke medan gaya menghasilkan

$$\begin{aligned}F(x, y) &= (2x + y, x + 3y) \\F(t) &= (5t^2 + 4t, 2t + 3t^2)\end{aligned}$$

Perkalian titik:

$$F \cdot dr$$

Menghasilkan fungsi integran yang lebih kompleks dibandingkan lintasan garis lurus. Hal ini menunjukkan bahwa bentuk lintasan dapat mempengaruhi proses perhitungan usaha. Namun karena medan gaya yang digunakan merupakan medan konservatif, hasil usaha tetap bergantung pada titik awal dan titik akhir.

Analisis Sifat Medan Vektor

Untuk menentukan sifat medan gaya, dilakukan pemeriksaan terhadap turunan parsial komponen medan.

Misalkan

$$P(x, y) = 2x + y$$

$$Q(x, y) = x + 3y$$

Hitung turunan parsial:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1$$

Karena kedua nilai tersebut sama, maka medan vektor tersebut merupakan medan konservatif. Hal ini berarti usaha yang dilakukan oleh gaya tidak bergantung pada lintasan yang ditempuh oleh partikel, melainkan hanya bergantung pada posisi awal dan posisi akhir.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa integral garis merupakan salah satu metode matematis yang efektif untuk menentukan usaha yang dilakukan oleh suatu gaya terhadap partikel yang bergerak di dalam medan vektor. Melalui tahapan parameterisasi lintasan, penentuan elemen perpindahan, serta perhitungan perkalian titik antara medan gaya dan elemen perpindahan, nilai usaha dapat diperoleh dengan mengevaluasi integral garis sepanjang lintasan yang dilalui partikel.

Hasil perhitungan pada lintasan garis lurus menunjukkan bahwa usaha yang dihasilkan oleh medan gaya sebesar 7,5 satuan energi. Selain itu, analisis yang dilakukan menunjukkan bahwa nilai medan gaya meningkat seiring dengan bertambahnya posisi partikel. Hal ini menunjukkan bahwa besar gaya dipengaruhi oleh koordinat posisi partikel pada bidang.

Selanjutnya, hasil pemeriksaan terhadap turunan parsial komponen medan vektor menunjukkan bahwa medan gaya yang digunakan termasuk ke dalam medan konservatif. Hal ini berarti bahwa besarnya usaha yang dilakukan oleh gaya tidak bergantung pada bentuk lintasan yang ditempuh oleh partikel, tetapi hanya ditentukan oleh titik awal dan titik akhir perpindahan. Oleh karena itu, penerapan integral garis pada medan vektor dapat memberikan pemahaman yang lebih jelas mengenai hubungan antara gaya, lintasan partikel, dan usaha dalam analisis sistem fisika.

DAFTAR PUSTAKA

- Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide* (7th ed.). Academic Press.
- Boas, M. L. (2006). *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (3rd ed.). John Wiley & Sons.

- Colley, S. J. (2018). *Vector Calculus* (5th ed.). Pearson.
- Kaplan, W. (2003). *Advanced Calculus* (5th ed.). Addison-Wesley.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). John Wiley & Sons.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2012). *Vector Calculus* (6th ed.). W. H. Freeman and Company.
- Schey, H. M. (2005). *Div, Grad, Curl, and All That: An Informal Text on Vector Calculus* (4th ed.). W. W. Norton & Company.
- Stewart, J. (2016). *Calculus* (8th ed.). Cengage Learning.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2014). *Thomas' Calculus* (13th ed.). Pearson.